LA GEOMETRÍA ANALÍTICA DE DESCARTES Y FERMAT: ¿ Y APOLONIO?

Víctor M. Hernández L.

Resumen

En este escrito se retoman algunos antecedentes históricos y prehistóricos de la Geometría Analítica como tal, con el propósito de mostrar cierta evidencia de que, sin importar la magnitud y lo novedoso de un aspecto o rama de la matemática, el reconocimiento social de su autoría es más bien: una asignación que reconoce las aportaciones que sintetizan la convergencia, en una época determinada, de diversas corrientes y recursos del pensamiento matemático, que el desconocimiento o negación de aquellos precursores, cercanos y lejanos, que le dieron lugar.

El que Apolonio, el más grande geómetra de la antigüedad, “fallara” en desarrollar la geometría analítica fue probablemente más el producto de la inexperiencia de la cultura antigua en una diversidad de curvas (se conocían escasamente unas doce) y de la pesada herramienta retórica de que se disponía; en cambio, las aportaciones “modernas” a la Geometría Analítica tuvieron a su disposición toda el álgebra renacentista.

INTRODUCCIÓN

Sin lugar a dudas, puede afirmarse que muy pocos aspectos o ramas de las matemáticas pueden asignarse al trabajo de un único individuo. La Geometría Analítica “de Descartes y Fermat” no fue la excepción a esto, es decir, no fue un producto exclusivo de sus investigaciones, sino más bien, la síntesis de varias tendencias matemáticas convergentes en los siglos XVI y XVII. Entre los autores que contribuyeron a las tendencias citadas pueden contarse Apolonio, Oresme, Vieta y muchos otros matemáticos.

Resulta de particular interés, por su magnitud e importancia, el trabajo de Apolonio (262 – 190 a. de C.), *Las Cónicas*[1], en el que ya se advierten, respecto al uso de coordenadas, muchos aspectos tan similares a los acercamientos modernos, tanto que, en algunas ocasiones, es juzgado como una geometría analítica que se anticipó a aquella de Descartes y Fermat por 1800 años, en la que se identifican formas retóricas de las ecuaciones de las curvas establecidas por Apolonio como relaciones entre las *abscisas* y las *ordenadas*. Las *abscisas* y las *ordenadas* de la época eran aplicaciones de líneas de referencia en general, y de un diámetro y una tangente en sus extremos en particular, lo que no hace diferencias esenciales con un marco coordenado rectangular, o más generalmente, oblicuo. En este sistema de referencia, las distancias medidas a lo largo del diámetro desde el punto de tangencia son las abscisas, y los segmentos paralelos a la tangente e intersecados entre el eje y la curva son las ordenadas. Sin embargo, el álgebra geométrica Griega no tenía

[1] Para una referencia más extensa ver: Boyer, Carl B., A History of Mathematics. Segunda Edición. Cap. 9. John Wiley & Sons. USA. 1991.

magnitudes negativas y, aún más, el *sistema coordenado* en cada caso era construido *a posteriori* con el fin de estudiar las propiedades de una curva dada y no *a priori* para propósitos de representación gráfica de una *ecuación* o *relación* expresada, ya fuera retórica o simbólicamente.

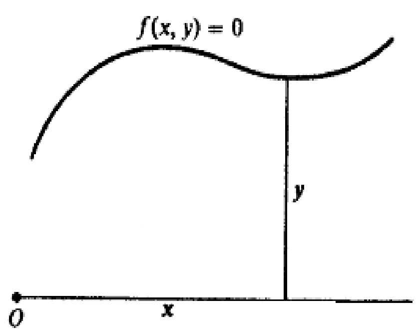
LA GEOMETRÍA ANALÍTICA DE DESCARTES Y FERMAT[2]

El paso final en la preparación para las nuevas matemáticas infinitesimales, y aquel que tuvo más posibilidades para la investigación, fue el desarrollo de la geometría por René Descartes (1596 - 1650) y Pierre de Fermat (1601 - 1665). La *Geometría* de Descartes fue publicada en 1637 como uno de tres apéndices de su *Discurso del Método / para conducir bien la razón, y buscar / la Verdad en las ciencias. / Además / La Dióptica / Los Meteoros / y / la Geometría / que son ensayos de este Método "*[3].

En el mismo año, Fermat envió a sus corresponsales en París su *Introducción a los Lugares Planos y Sólidos*. Estos dos ensayos establecieron los fundamentos para la geometría analítica. Sin embargo, aunque el trabajo de Fermat fue más sistemático en algunos aspectos, no fue publicado de hecho sino hasta 1679, después de su muerte, y por esta razón hoy hablamos de la geometría cartesiana en lugar de la geometría fermatiana.

La idea central de la geometría analítica es la correspondencia entre una ecuación $f(x, y) = 0$ y el lugar (generalmente una curva) consistente de todos aquellos puntos cuyas coordenadas (x, y) relativas a dos ejes fijos perpendiculares satisfacen la ecuación. De hecho, ni Descartes ni Fermat usaron sistemáticamente dos ejes de coordenadas en la forma estándar actual. Lo más cercano a ello viene indicado en el principio guía de Fermat:

> Cuando encontremos dos cantidades conocidas en una ecuación, tenemos un lugar geométrico, la extremidad de una de éstas describe una línea, recta o curva.



Para Fermat (tanto como para Descartes) las dos cantidades desconocidas en una ecuación eran segmentos lineales más que números. Uno de éstos era medido a la derecha desde un punto de referencia sobre un eje horizontal, y el segundo era localizado con una ordenada vertical sobre el extremo del primero. El principio de Fermat afirma entonces que el punto terminal de la ordenada describe la curva correspondiente a la ecuación dada. La práctica general de Descartes fue similar, de tal manera que ambos, de hecho, dieron con la "geometría ordenada" en lugar de la geometría co-ordenada.Fermat se adhirió a la notación algebraica de Vieta, y designó a sus variables como *A* y *E* en lugar de *x* y *y*. Sin embargo, Descartes usó totalmente la notación estándar actual (o, más precisamente, nosotros usamos la notación de Descartes), con la simple excepción de que él escribía en lugar de = para la igualdad. Estandarizó

[2] Tomado de: Edwards, C.H., The Historical Development of Calculus. Pp. 95-97. Springer-Verlag. 1979.USA.

[3] Este es el título que dan las traducciones españolas. Quizás fuera mejor "nuestra razón" en vez de "la razón", pues Descartes dice "... pour bien conduire sa raison" y no "la raison".

la notación exponencial para las potencias e inició la práctica común de usar letras cerca del inicio del alfabeto para los parámetros y aquellas cerca del final para las variables.

La intención de ambos, Descartes y Fermat, fue aplicar los métodos del álgebra renacentista a la solución de los problemas en geometría. Descartes establece el plan como sigue[4]:

> Si entonces, deseamos resolver algún problema, primero suponemos que ya disponemos del problema y damos nombre a todas las líneas que parecen ser necesarias para su construcción, tanto a aquellas que son desconocidas como a las conocidas. Entonces, sin hacer distinción entre las líneas conocidas y desconocidas debemos desembrollar la dificultad en cualquier manera que muestre más naturalmente las relaciones entre esas líneas, hasta que nos sea posible expresar una cantidad de dos formas. Esto constituirá una ecuación, ya que los términos de una de esas dos expresiones es en conjunto igual a los términos de la otra.

Descartes empezó con un problema geométrico, que comúnmente involucraba una curva dada, y la definía tanto como un lugar geométrico estático a la manera de los griegos como en términos de un movimiento continuo uniforme (como la espiral de Arquímedes). Su procedimiento fue trasladar un problema geométrico al lenguaje de una ecuación algebraica, luego simplificarla y finalmente resolver esta ecuación.

La primera referencia del Método de Descartes se encuentra en una carta de Constantino Huygens a Descartes, de octubre de 1635, donde aquél le manifiesta su satisfacción por haberse decidido a publicar la *Dióptrica* y le aconseja sobre la mejor manera de hacer la figura y de imprimirla.

En la portada de su libro: *Discurso del Método / para conducir bien la razón, y buscar / la Verdad en las ciencias. / Además / La Dióptica / Los Meteoros / y / la Geometría / que son ensayos de este Método "* no figura el nombre del autor, omisión voluntaria que obedecía al propósito, como después dijo el propio Descartes, de conocer mejor las opiniones y las críticas.

La parte menos discutida en su época fue la *Geometría*, sin duda porque, como dice el autor no ignorarlo, ella tendría un pequeño número de lectores, pues debían ser personas que no solamente estuviesen al corriente de todo lo que se sabía de Geometría y de Álgebra, sino que debían ser, además, "*laboriosos, ingeniosos et attentos*".

LA GEOMETRÍA DE DESCARTES

El *Libro Primero* de la *Geometría*[5] trata de los *Problemas que pueden resolverse sin emplear más que círculos y líneas rectas.*

---

[4] D.E. Smith y M.L. Latham, *The Geometry of Rene Descartes*. Chicago: Open Court, 1925 (Dover reprint).

[5] La *Geometría* está formada por tres libros y es algo más breve que los otros dos agregados al *Discurso*; abarca en la edición original 120 páginas, con 48 figuras, aunque son diferentes 30, pues se repite la impresión cuando vuelve a referirse a una de ellas.

El *Libro Segundo* se titula *De la naturaleza de las líneas curvas.* Trata especialmente de las de grado superior y, sobre todo, de la construcción y propiedades de tangentes y normales, líneas éstas cuya importancia deriva de los problemas de la reflexión de la luz sobre las superficies curvas.

El *Libro Tercero* está dedicado a los problemas sólidos o supersólidos, lo cual lo lleva al estudio de la resolución de ecuaciones, discusión de sus raíces, y relaciones entre los coeficientes. Muestra que una ecuación puede tener tantas raíces como dimensiones tiene el grado, y da luego su famosa regla de los signos. Por último, trata los célebres problemas de 3er grado: la trisección del ángulo y la duplicación del cubo y señala que a ellos puede reducirse cualquier otro problema de 3er grado.

En su Libro Primero, Descartes escribe[6]:

LIBRO PRIMERO

De los problemas que se pueden construir sin

emplear más que círculos y líneas rectas.

Todos los problemas de Geometría pueden reducirse fácilmente a tales términos, que no es necesario conocer de antemano más que la longitud de algunas líneas rectas para construirlos.

Cómo el cálculo de la aritmética se relaciona con las

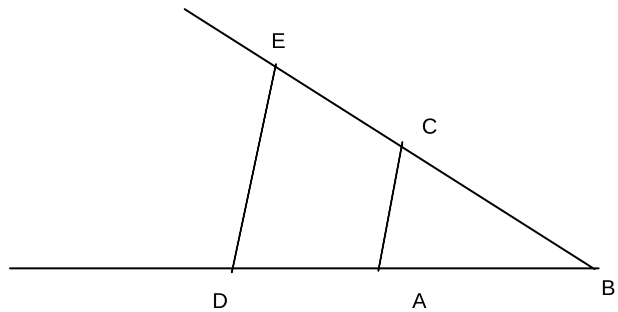
Operaciones de geometría.

Y así como la aritmética no comprende más que cuatro o cinco operaciones, que son la adición, la sustracción, la multiplicación, la división y la extracción de raíces, que pueden tomarse como una especie de división, así también no hay otra cosa que hacer en geometría, respecto a las líneas que se buscan, para prepararlas a ser conocidas, que agregarles o quitarles otras, o bien, teniendo una, que llamaré la unidad para relacionarla lo más posible con los números, y que ordinariamente puede ser tomada a discreción, y teniendo luego otras dos, encontrar una cuarta que sea a una de esas dos, como la otra es a la unidad, que es lo mismo que la multiplicación; o bien encontrar una cuarta que sea a una de esas dos como la unidad es a la otra, lo que es lo mismo que la división; o, en fin, encontrar una, dos, o varias medias proporcionales entre la unidad y alguna otra línea, lo que es lo mismo que extraer la raíz cuadrada, o cúbica, etc. Y yo no temeré introducir estos términos de aritmética en la geometría, a fin de hacerme más inteligible.

La multiplicación.

Sea, por ejemplo, AB la unidad, y que deba multiplicarse BD por BC; no tengo más que unir los puntos A y C, luego

[6] Transcripción parcial de: Descartes, LA GEOMETRÍA, Traducida por Pedro Rossell Soler. Profesor de la Universidad de Buenos Aires. Espasa - Calpe. Argentina. S.A. Buenos Aires - México. 1947. P. 49 - 60



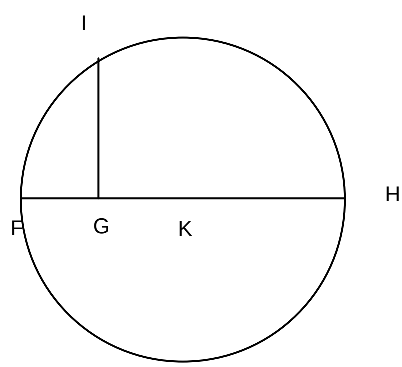
trazar DE paralela a CA, y BE es el producto de esta multiplicación.

La división

O bien, si deben dividirse BE por BD, habiendo unido los puntos E y D, se traza AC paralela a DE y BC es el resultado de esa división.

La extracción de la raíz cuadrada.

O, si hay que extraer la raíz cuadrada de GH, se le agrega en línea recta FG, que es la unidad y dividiendo FH en dos partes iguales por el punto K, con ese punto como centro se traza el



círculo FIH; luego elevando desde el punto G una línea recta, con ángulos rectos sobre FH, hasta I, es GI la raíz buscada. No digo nada aquí de la raíz cúbica, ni de las otras, pues de ellas trataré más detalladamente más adelante.

Cómo pueden emplearse letras en geometría.

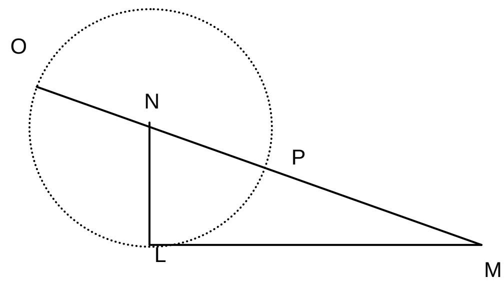
Pero a menudo no hay necesidad de trazar esas líneas sobre el papel y basta con designarlas por ciertas letras, una sola para cada línea. Así, para sumar la línea BD a la

> GH, designo a la una *a* y a la otra *b* y escribo *a* + *b* ; y *a* - *b* para restar *b* de *a*; y *a b* para multiplicar la una por la otra; y $\frac{a}{b}$ para dividir *a* por *b*; y aa o a^2 para multiplicar *a* por sí misma; y a^3 para multiplicar otra vez por *a*, y así al infinito; y $\sqrt{a^2+b^2}$ para extraer la raíz cuadrada de a^2+b^2 y $\sqrt{C.a^3-b^3+abb}$ para extraer la raíz cúbica de a^3-b^3+abb y así otras.

Termina este apartado dando algunas indicaciones acerca de las precauciones a tomar para no perder de vista los nombres y las asignaciones de éstos con las líneas, para luego abordar:

> *Cómo se llega a las ecuaciones que sirven para resolver los problemas.*
>
> Así, si se quiere resolver algún problema, debe de antemano considerarse como ya hecho, y dar nombre a todas las líneas que parecen necesarias para construirlo, tanto a las que son desconocidas como a las otras. Luego, sin considerar ninguna diferencia entre estas líneas conocidas y desconocidas, se debe examinar la dificultad según el orden que se presente como más natural de todos, en la forma como aquellas líneas dependen mutuamente las unas de las otras, hasta que se haya encontrado la manera de expresar una misma cantidad de dos maneras: lo que se denomina una ecuación, pues [el resultado de] los términos de una de esas dos formas son iguales a los de la otra. ...
>
> *Cuáles son los problemas planos.*
>
> Si este puede ser resuelto por la geometría ordinaria, es decir, sin servirse más que de líneas rectas y circulares trazadas sobre una superficie plana, cuando la última ecuación haya sido enteramente desarrollada, no quedará, al fin, más que un cuadrado desconocido, igual a lo que resulta de la adición, o sustracción, de su raíz multiplicada por alguna cantidad conocida [coeficiente], más alguna otra cantidad también conocida [término independiente].
>
> *Cómo se resuelven.*
>
> Y entonces ésta raíz o línea desconocida, se encuentra fácilmente. Si se tiene, por ejemplo
>
> $$z^2 = az + bb$$
>
> construyo el triángulo rectángulo NLM, cuyo lado LM es igual a *b*, raíz cuadrada de la cantidad conocida *b* , y el

otro LN es $\frac{1}{2}a$, la mitad de la otra cantidad conocida, que está multiplicada por *z*, que supongo ser la línea desconocida. Luego, prolongando MN, base de ese triángulo, hasta O, de modo que NO sea igual a



NL, la línea total OM es *z*, la línea buscada; ella se expresa

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a\,a + b\,b}$$

Si se tuviera

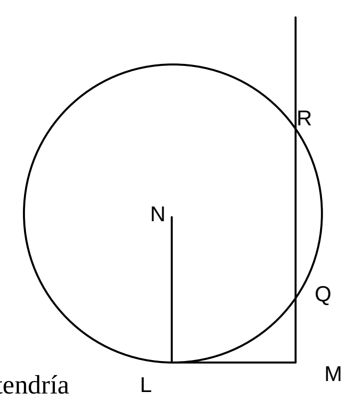
$$y\,y = -a\,y + b$$

e *y* fuera la cantidad que debe encontrarse, se construye el mismo triángulo rectángulo NLM y de la base MN se quita NP, igual a NL; el resto PM es *y*, la raíz buscada. De modo que tengo

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a\,a + b\,b}\ .$$

Y lo mismo, si tuviera

$$x^4 = -ax^2 + b^2$$



PM sería x^2 y tendría

$$x = \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a\,a + b\,b}}$$

y así otros casos.

En fin, si tuviera

$$z^2 = a\,z - b\,b$$

se hace NL igual a $\frac{1}{2}a$, y LM igual a *b*, como anteriormente; luego, en vez de unir los puntos M y N, se traza MQR paralela a LN y trazando un círculo con centro en N y que pase por L la cortará en los puntos Q y R; la línea buscada *z* es MQ, o bien MR, pues en este caso ella se expresa de dos maneras, a saber:

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a\,a - b\,b}$$

y

$$z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a\,a - b\,b}$$

Y si el círculo que tiene su centro en N y para por el punto L no corta ni toca la línea recta MQR, no hay ninguna raíz de la ecuación, de manera que puede asegurarse que la construcción del problema propuesto es imposible.

Por otra parte, estas mismas raíces se pueden encontrar por una infinidad de otros medios y he indicado aquí solamente esos muy simples, a fin de mostrar que se pueden construir todos los problemas de la geometría ordinaria, sin hacer más que lo poco que está comprendido en las cuatro figuras que he explicado. No creo que los antiguos lo hayan observado; pues en tal caso ellos no hubieran escrito libros tan voluminosos en que el solo orden de las proposiciones nos muestra que no poseían el verdadero método para resolverlas todas, sino que solamente han recopilado las que habían resuelto.

A continuación, Descartes da cuenta de su solución al problema de *Pappus* que resolvió en 1632, problema que le había sido propuesto por *Golius* para que mostrara la aplicación del método que había descubierto y cuya solución resultó ser la piedra de toque del método Cartesiano. El enunciado le fue dado en latín, reproduciéndolo de la traducción de *Commandino*[7] de las obras de *Pappus*, el que en términos modernos puede enunciarse como sigue:

[7] *Pappi Alexandrini mathematicae collectiones a Federico Commandino Urbinate in lantinum conversae et commentariis illustratae*. Pisa, 1588; Venecia, 1589.

> Dadas 2*n* rectas, encontrar el lugar de los puntos tales que el producto de sus distancias, bajo ángulos dados, a *n* de esas rectas está en una relación dada con el producto de las distancias, bajo ángulos también dados, a las otras *n* rectas.

En su solución, Descartes no describe todos los casos posibles porque, según lo dice al P. Mersenne en su carta del 31 de marzo de 1638, *hace como los arquitectos que sólo indican lo que se debe hacer, dejando el trabajo manual a los albañiles y carpinteros.*

DESCARTES Y FERMAT

Así pues, mientras que Descartes comúnmente empezaba con una curva y derivaba su ecuación algebraica, Fermat comenzaba con una ecuación algebraica y derivaba de ella las propiedades geométricas de la curva correspondiente. Por ejemplo, él comenzó con la ecuación de segundo grado en dos variables:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

mostrando mediante técnicas de traslación y rotación que su lugar geométrico es una sección cónica (excepto para casos degenerados), y clasificó la variedad de casos de esa ecuación como elipse, hipérbola o parábola. Una discusión de este trabajo puede encontrarse en el capítulo 3 de Mahoney, la Biografía Matemática de Fermat[8].

Así, los trabajos de Descartes y Fermat tomaron juntos, acompasadamente, los dos aspectos complementarios de la geometría analítica - estudiando ecuaciones *a través del significado* de las curvas y estudiando curvas *definidas por* ecuaciones. Una característica común e importante de su trabajo en geometría analítica fue su concentración en *ecuaciones indeterminadas* que involucraban variables *continuas*. Vieta, por ejemplo, había estudiado solamente *ecuaciones determinadas* en las cuales la "variable", aunque desconocida, es de hecho una constante fija a ser encontrada.

La noción de variable, como en principio enfatizaron Descartes y Fermat, fue indispensable para el desarrollo del cálculo - una materia que difícilmente puede ser discutida excepto en términos de variables continuas. Más aún, la geometría analítica dio cabida a un vasto territorio virgen de curvas nuevas para ser estudiadas y se convirtió en acicate para la invención de técnicas algorítmicas que permitieran su investigación sistemática. Mientras que los geómetras griegos habían sufrido por la escasez de curvas conocidas, ahora una nueva curva podía ser introducida por el simple acto de escribir una nueva ecuación. En este sentido, la geometría analítica proveyó tanto un campo más amplio para manejar las técnicas infinitesimales del siglo XVII, como la maquinaria técnica necesaria para su elucidación.

[8] M.S. Mahoney. The Mathematical Career of Pierre De Fermat. Princeton, N.J.: Princeton University Press. 1973. Chapters II, III.

POSICIÓN Y VALOR DE LA *GEOMETRÍA* DE DESCARTES

POSICIÓN Y VALOR DE LA GEOMETRÍA

DE DESCARTES[9]

La aplicación del cálculo a la geometría, para el estudio de las propiedades de las figuras y la solución de los problemas de ellas derivados, fue empleado por los matemáticos desde los tiempos más remotos, pero al principio sólo para determinar longitudes, áreas y volúmenes o establecer proporciones entre ellos.

La escuela de Platón sistematizó el raciocinio en las matemáticas, señalando normas para abordar la solución de los problemas y dio jerarquía a esa ciencia. Pero es en los Elementos de Euclides donde se encuentra tratada en forma gráfica la resolución de las ecuaciones de 2º grado y luego un intento de representación de las cantidades racionales y de las irracionales; también se muestra que la inconmensurabilidad de la relación entre el lado y la diagonal del cuadrado no es motivo para rechazar de las matemáticas esas últimas cantidades. En los *Porismas*, parece que se consideraban las secciones cónicas como lugares de puntos que respondían a condiciones determinadas.

Arquímedes avanzó en el estudio de los cuerpos, tratando los "conoides" y los "esferoides" (paraboloide y elipsoide), así como nuevas curvas, principalmente las espirales, y creando, puede decirse, el método de los isoperímetros, por lo que debe considerársele como vidente lejano de la geometría infinitesimal.

En Apolonio, el insigne geómetra de Pérgamo, que vivió tres siglos antes de Cristo, se encuentra en su gran obra sobre las *Secciones cónicas*, y en su tratado sobre los *Lugares planos*, un estudio racional de verdadera geometría. Apolonio distinguió las tres variedades de curvas y les dio los nombres de *parábola*, *elipse* e *hipérbola*, obtenidas todas con planos que cortaban un cono de rotación, con inclinación igual, menor o mayor que la del cono, encontrando que en el primer caso el cuadrado de la cuerda es proporcional a su distancia al vértice de la cuerda ($y^2 = 2p \cdot x$) y en los otros casos, la cuerda presenta defecto o exceso sobre aquel valor ($y^2 = 2p \cdot x \pm c \cdot x^2$). Fue el primero en considerar las dos napas del cono, señalando que las dos ramas de la hipérbola son partes de una misma curva. Además descubrió las secciones circulares de un cono que no es de rotación; la constancia de la suma o diferencia de las distancias de un punto de las curvas a dos puntos fijos (focos), y la relación del diámetro con las cuerdas que

[9] Trascripción parcial de: Descartes. , LA GEOMETRÍA, Traducida por Pedro Rossell Soler. Profesor de la Universidad de Buenos Aires. Espasa - Calpe. Argentina. S.A. Buenos Aires - México. 1947. P. 49 - 60

divide por mitad, direcciones que llamó *conjugadas*, dando la expresión del cuadrado de dicha semicuerda en proporción constante con el producto de los segmentos en que el diámetro queda dividido: a estos segmentos los llamó *abscisas* y a la semicuerda, *ordenada*.

Como se ve, Apolonio puede ser considerado el verdadero precursor de la geometría analítica, y Zeuthen, en su estudio sobre las *Secciones cónicas en la antigüedad*, piensa que muchas de las propiedades de esas curvas debieron ser encontradas por Apolonio por medio del sistema de coordenadas, pero que las demostraciones fueron después transformadas según los métodos geométricos de entonces.

La obra de Apolonio es el fundamento de la teoría moderna de las cónicas.

Más de cinco siglos después, en el III de la era cristiana, aparece Pappus, cuya obra es una recopilación cuidadosa y ordenada de la escrita por sus antecesores, pero con el agregado de muchas proposiciones nuevas, algunas dejadas sin resolver, como el problema famoso que dio motivo a la solución de Descartes[10].

Hasta la época del renacimiento, el desarrollo de la matemática no presenta aspectos nuevos, y el tratamiento de los problemas responde a los principios de la geometría griega. Merece señalarse, no obstante, la concepción de Nicolás Oresme, erudito del siglo XIV, que se ocupó, entre otras cosas, de matemáticas y quien, para estudiar ciertas figuras geométricas, relacionaba las posiciones de los puntos con líneas fijas, por analogía con la longitud y la latitud para los puntos de la tierra.

En época algo anterior a la de Descartes, la figura descollante es *Vieta* (1540-1603), quien introdujo indiscutibles progresos en álgebra y en trigonometría, a la vez que la aplicación, en geometría, para la solución de muchos problemas, de los recursos de las otras ramas. A él se deben el estudio de los triángulos esféricos, la resolución gráfica de algunas ecuaciones de 3er grado, la determinación del círculo tangente a otros tres y otras cuestiones relacionadas con éstas.

Descartes seguramente no conoció la obra de Vieta hasta después de su salida del colegio, por ser su autor protestante y por haberla publicado en edición muy reducida y sólo difundida entre los amigos; bien puede creerse a Descartes cuando afirma que mientras estuvo en Francia "no la conoció ni por las tapas". Poco después de haber dado la solución del problema de Pappus, Mersenne le envió un ejemplar de la *Logística Speciosa*, a lo cual Descartes le manifiesta "que no ha encontrado en ella nada

[10] Hay otro problema llamado también de Pappus, que se refiere al trazado de un segmento de longitud dada, apoyando sobre los lados de un ángulo y que debe pasar por un punto dado, situado sobre la bisectriz de dicho ángulo. Hay un libro de A. Maroger (Ed. Vuibert) que recopila cien soluciones diferentes de este problema.

de utilidad ni cree que nadie pueda aprender allí, no ya a resolver todos los problemas, ni siquiera ciertos problemas bien sencillos". Sin duda, le habrá desagradado el estilo confuso y complicado, el lenguaje, mezcla de palabras griegas y latinas y las notaciones, del sistema cósico pero con agregados raros y especiales que inventaba Vieta y que hicieron decir a Vasset, traductor al francés de algunas de sus memorias, "que se necesitaba otro Vieta para entenderlas".

Entre los geómetras de la época de Descartes merecen señalarse *Kepler* (1571-1630) y *Desargues* (1593 - 1632), pero las obras de éstos no tuvieron influencia alguna sobre el método analítico. Descartes conoció de Kepler sus estudios sobre óptica y sobre el perfil de los lentes y de Desargues tuvo referencias después de la publicación de la *Geometría*, formándose, por cierto, una elevada opinión de él e interesándose por el parecer que le merecía su libro.

Fermat es el que podía disputar a Descartes la gloria por la creación de la geometría analítica y así han querido presentarlo algunos críticos, porque dio las ecuaciones de algunas líneas, cónicas y línea recta, como lugar geométrico de puntos, en una forma más sencilla que la expuesta por Descartes. En el *Elogio* que se publicó el día siguiente de la muerte de Fermat, en 1665, se dice que entre sus obras dejó un tratado analítico para resolver los problemas planos y sólidos, conocido antes de que Descartes hubiera publicado nada sobre ese tema; y en los tiempos modernos, Cantor, por ejemplo, en su gran *Historia de las matemáticas*, afirma que en ninguna parte Descartes describe el establecimiento de un lugar geométrico tan claramente como lo hace Fermat en su tratado.

En efecto, éste escribe: "es cómodo para establecer las ecuaciones, tomar las dos cantidades desconocidas bajo un ángulo dado (por lo común recto) y darse la posición y la extremidad de una de ellas"[11]. Así para deducir la ecuación de la línea recta considera sobre una recta indefinida un punto fijo N y otro punto I fuera de ella; la perpendicular por I a la recta indefinida la establece por la relación $d \cdot x = b \cdot y$ y si esta relación se mantiene constante, corresponde a puntos que están sobre la recta NI.

Esto, así como las ecuaciones de las cónicas, figura en el *Isagoge ad Locos Planos et Solidos*, restauración de uno de los tratados de Apolonio, que Fermat dio a conocer hacia 1636, es decir, poco antes de la publicación de la *Geometría*.

Fermat era cinco años menor que Descartes, pues nació en agosto de 1601, en el sur de Francia, cerca de Montauban (Gascuña). Hizo la carrera de magistrado y poseyó una cultura superior muy completa, distinguiéndose por su

[11] FERMAT, *Œuvres*, edic. *P. Tannery et Ch. Henry,* t. I, p. 92.

dedicación a las matemáticas, en las que ha dejado una obra muy profunda en la teoría de los números, así como en la de las probabilidades, de la cual es uno de los creadores. No se conoce la fecha de sus primeros trabajos, pues no se publicaron, limitándose a hacerlos conocer por sus amigos, Pascal (padre), Roberval, Mersenne, Carcavi y otros. En 1619, cuando Descartes, como se ha visto, ya había resuelto, con métodos propios y con el compás por él ideado, muchos problemas que no lo habían sido antes, Fermat contaba sólo 17 años, y en 1632, cuando el primero, en pleno dominio de su método geométrico-analítico, resuelve el problema de Pappus, no había aparecido aún el *Isagoge*. Parece que Fermat, antes de 1637, resolvió el problema, que recibiera por intermedio de Roberval y éste de Mersenne, pero a la manera de los antiguos y sólo para el caso de tres rectas.

Sin embargo, lo que más debe señalarse es el alcance y trascendencia de la obra de uno y otro: Fermat pudo haber concebido el modo de construir curvas por medio de las ecuaciones representativas, la "propiedad específica" de cada una, como la llamó; pero no lo vio o no lo presentó como un procedimiento que pudiera dominar en la matemática; como un método nuevo y general de resolver todos los problemas, según lo hace Descartes. De aquí que éste tuviera discípulos y que su obra se enseñara, se difundiera, se ampliara con nuevas aplicaciones. Descartes tuvo conciencia, y lo dijo bien claramente, que hacía una obra definitiva, en lo que tiene de ordenado y sistemático.

CONCLUSIONES

Parece haber en la historia suficientes razones para pensar que el trabajo precursor de Apolonio tuvo, y tiene, la suficiente fuerza y calidad de pensamiento matemático como para haber cobrado nueva vida en cuanto alcance y generalidad en la obra de Descartes y Fermat, los que al disponer de las herramientas más *eficientes* proporcionadas por el álgebra renacentista, hicieron posible tanto la extensión de las propuestas de Apolonio, como la generalización de sus resultados y la conformación de lo que hoy conocemos como Geometría Analítica, es decir, aquella disciplina matemática caracterizada por los recursos mediante los que se abordan fundamentalmente los siguientes dos problemas[12]:

1. Dada una ecuación, hallar el lugar geométrico que representa.
2. Dado un lugar geométrico definido por determinadas condiciones, hallar su ecuación matemática.

Esta versión de Geometría Analítica integra de manera complementaria los trabajos de Descartes y de Fermat.

Y..., en adelante, la historia del pensamiento matemático sigue concretándose en las diferentes tendencias de la obra de quienes lo cultivan y, eventualmente, concretando la

[12] Kindle, Joseph H., Geometría Analítica. McGraw Hill. Serie de Compendios Schaum. Colombia. 1969.

emergencia de nuevas ramas o aspectos de la matemática. El siguiente ejemplo en la historia es, sin duda, la síntesis del cálculo, cuyo desarrollo es asignado, desde el punto de vista tradicional, a Newton y Leibnitz; asignación que, según hemos ejemplificado con la Geometría Analítica, habría que considerar más como un reconocimiento, a su época y personas, de la síntesis de las tendencias y esfuerzos que provienen desde la antigüedad hasta sus más cercanos precursores, que como el producto exclusivo de sus investigaciones.

REFERENCIAS

[1] Boyer, Carl B. (1991) "*A History of Mathematics*". John Wiley & Sons, Inc. USA.

[2] Collette, Jean Paul (1986). "*Historia de las Matemáticas*". Editorial Siglo Veintiuno, México.

[3] Edwards, C.H. (1979) "*The Historical Development of the Calculus*" Springer- Verlag New York, Inc. USA.

[4] Newman, James R. (1980) "*El Mundo de las Matemáticas*". Enciclopedia Sigma, Tomo 4. Ediciones Grijalbo, México.

[5] Struik, Dirk J. (1967) *"A concise History of Mathematics"*. Dover Publications, Inc. New York, USA.

[6] Thuiller, Pierre (1991) *"De Arquímedes a Einstein. Las Caras Ocultas de la Invención Científica"*. Consejo Nacional para la cultura y las Artes / Editorial Alianza México.

SITIOS EN LA RED

[7] http://smard.cqu.EDU.AU/Links/Websites/History_of_Mathematics/

[8] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Indexes/_1000_AD.html

[9] http://math.rice.edu/~lanius/Geom/his.html